数理解析研究所講究録
312巻 1977年 161-172

コレログラムの或る簡便推定量について

東京理科大 理学部　　岩瀬晃盛

1.　$X(t)$, $t=0,\pm1,\pm2,\cdots$, を実正規定常確率過程とし, $E[X(t)]=\mu$, $V[X(t)]=\sigma^2$ 及び $Cov[X(t),X(t+h)]=\sigma^2\rho(h)$ とする。μ は既知であると仮定し，一般性を失なうことなく $\mu=0$ と置く。ここでの目的はコレログラム $\rho(h)$ の推定である。簡単のために $X(t)$ は $t=1,2,\cdots,N,\cdots,N+h$ で観測されるものとする。N は正整数，h は非負整数である。

通常は，$\rho(h)$ の推定量として

$$r^*(h;D)=\sum_{t=1}^{N}(X(t)-D)\cdot(X(t+h)-D)\Big/\sigma^2N \quad ,\ \sigma^2\ \text{既知}, \tag{1}$$

$$r(h;D)=\frac{\sum_{t=1}^{N}(X(t)-D)\cdot(X(t+h)-D)}{\sum_{t=1}^{N}(X(t)-D)^2} \quad ,\ \sigma^2\ \text{未知} \tag{2}$$

が用いられることが多い。ここで，Dはゼロレベルを誤ってDだけ真値から離して設定してしまったそのズレの大きさを示すものである。Dは未知なる任意の実数である。ここでは，$r^*(h;D)$, $r(h;D)$ のかわりに，符号変換を利用した

$$\tilde{r}(h,D;\alpha,\beta)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{\sigma^2}\cdot\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\Big[\alpha\,(X(t)-D)\cdot\mathrm{sgn}(X(t+h)-D)+\beta\cdot\mathrm{sgn}(X(t)-D)\cdot(X(t+h)-D)\Big]\quad,\ \sigma^2\text{既知},\quad(3)$$

$$\bar{r}(h,D;\alpha,\beta)=\frac{\sum_{t=1}^{N}\Big[\alpha\cdot(X(t)-D)\cdot\mathrm{sgn}(X(t+h)-D)+\beta\cdot\mathrm{sgn}(X(t)-D)\cdot(X(t+h)-D)\Big]}{\sum_{t=1}^{N}|X(t)-D|}\quad,\ \sigma^2\text{未知},\quad(4)$$

なる推定量を考察する。但しα,βは$\alpha+\beta=1$なる任意の非負実数であり，$\mathrm{sgn}(x)=1\ (x>0),\ 0\ (x=0),\ -1\ (x<0)$である。データから$\rho(h)$を推定しようとする場合，計算機を前提にしても，$r^*(h,D)$や$r(h,D)$を用いるよりも$\tilde{r}(h,D;\alpha,\beta)$や$\bar{r}(h,D;\alpha,\beta)$を用いる方が計算時間は大幅に短縮される。しかもNが或る程度大きい場合，$r^*(h,D)$や$r(h,D)$の計算時間そのものが相当大きいので，この計算時間の短縮は$\tilde{r}(h,D;\alpha,\beta)$や$\bar{r}(h,D;\alpha,\beta)$の使用が実際的な意味でかなり有効であることを示している。このことより，$\tilde{r}(h,D;\alpha,\beta)$や$\bar{r}(h,D;\alpha,\beta)$は$\rho(h)$の簡便推定量と呼ばれている。

(1)式の中の$X(t)X(t+h)$を$X(t)\cdot\mathrm{sgn}\,X(t+h)$で換えることを最初に示したのはK. Takahasi & K. Husimi (1935)である。その後1962年にM. Hugiがsimple Markov Gaussian processでの$\tilde{r}(h,0;1,0)$の分散式を，また1964年にGaussian processでの$\tilde{r}(h,0;1,0)$の分散式を示した。これらにより，$|\rho(h)|$が或る値より大きいhについて，$r^*(h,0)$の分散よりも$\tilde{r}(h,0;1,0)$の分散の方が小さいと云う結果が数値計算例によって示された。

1973年，K. Iwase は1964年の M. Huzii の結果の別証を与えたことより，より簡単な分散式を得た。また，1976年，Iwase は Gaussian process での $\tilde{r}(h,D;1,0)$ の分散式を与え，D の増大に対して $\tilde{r}(h,D;1,0)$ の MSE の方が $r^*(h,D)$ の MSE の増大より少ないことを数値計算例で示し，$D=0$，$\rho(h)=a^{|h|}$，$|a|<1$ の時，$|\rho(h)|$ が或る値より大きい h について，$r^*(h,0)$ の分散よりも $\tilde{r}(h,0;1,0)$ の分散の方が小さいことを証明した。1966年に Huzii は M-dependent Gaussian process での $\bar{r}(h,0;1,0)$ の $N\to\infty$ での漸近分散を示し，数値計算例により，$r(h,0)$ の漸近分散よりも $\bar{r}(h,0;1,0)$ の漸近分散の方がどの h についても大きいことを示した。

今回の主な目的は，次の2つについてである。第1にウエイト α,β の決め方によって，漸近分散の減少と云う意味でどの程度改善されるか？ 第2に D の増大に対して σ^2 が既知のときのような"良さ"がどの程度保存されるか？ これを $\bar{r}(h,D;\alpha,\beta)$ について行なう。

2. $\bar{r}(h,D;\alpha,\beta)$ の漸近的性質.

以下では，M. Huzii[3] が扱ったのと同じ $X(t)$ を仮定する。即ち，$E[\xi(t)]=0$，$V[\xi(t)]=1$ 及び $E[\xi(t_1)\xi(t_2)]=0$ $(t_1\neq t_2)$ なる white noise $\xi(t)$ によって

$$X(t)=G_0\cdot\xi(t)+G_1\cdot\xi(t-1)+\cdots+G_M\cdot\xi(t-M)$$

の如く finite moving average で表現される正規定常過程であるとする。ここで M は正整数，G_k は実定数である。

$h=0$ のときは，ほとんど確実に $\tilde{r}(0,D;\alpha,\beta)=1$ であるから，以下では $h\geq 1$ とする。最初に次のように変形する。

$$\sqrt{N}\cdot\left(\tilde{r}(h,D;\alpha,\beta)-H(h,\delta)\right)$$
$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{\sigma}\sum_{t=1}^{N}\bigl[\alpha\cdot(X(t)-D)\cdot\mathrm{sgn}(X(t+h)-D)+\beta\cdot\mathrm{sgn}(X(t)-D)\cdot(X(t+h)-D)-H(h,\delta)\cdot|X(t)-D|}{\frac{1}{N}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{\sigma}\sum_{t=1}^{N}|X(t)-D|}\ . \qquad (4)$$

但し
$$\delta=\frac{D}{\sigma}\ ,\quad \Phi(\delta)=\int_0^{\delta}\exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right]dx\ ,$$
$$H(h,\delta)=\left\{\rho(h)\exp\left[-\frac{1}{2}\delta^2\right]+\delta\Phi(\delta)\right\}\Big/\left\{\exp\left[-\frac{1}{2}\delta^2\right]+\delta\Phi(\delta)\right\}\ ,$$

とする。

<u>定理 1</u>.
$$\tilde{r}(0,D;\alpha,\beta)\xrightarrow[N\to\infty]{}\delta\Phi(\delta)+\exp\left[-\frac{1}{2}\delta^2\right]\quad \text{in propability.}$$

証明は K.Iwase[5] の (2-1) 式及び (2-20) 式を利用すればよい。この定理での $\tilde{r}(0,D;\alpha,\beta)$ とは (4) 式での分母の部分である。

$X(t)$ 及び D は次元を持っているため扱いにくいので，簡単のために

$$Y(t)=\frac{X(t)-D}{\sigma}$$

と置く。このとき

$$Z(t)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{\alpha\cdot Y(t)\cdot \mathrm{sgn}\,Y(t+h)+\beta\cdot \mathrm{sgn}\,Y(t)\cdot Y(t+h)-H(h,\delta)\cdot|Y(t)|\right\}$$

とすれば，この $Z(t)$ は $E[Z(t)]=0$ なる Diananda の意味での $(M+h)$-dependent process であり， $N\to\infty$ のとき $\sum_{t=1}^{N} Z(t)/\sqrt{N}$ は母平均ゼロ，母分散 $\sum_{k=-(M+h)}^{M+h} C(k)$ の正規分布に法則収束する。但し $C(k)=E[Z(t)\,Z(t+k)]$ である。従って，以下に於いて $C(k)$ を求める。

$$\begin{aligned}
C(k)=\frac{\pi}{2}\Big\{&\alpha^2\cdot E[Y(t)\cdot \mathrm{sgn}\,Y(t+h)\cdot Y(t+k)\cdot \mathrm{sgn}\,Y(t+h+k)]\\
&+\alpha\beta\cdot E[Y(t)\cdot \mathrm{sgn}\,Y(t+h)\cdot \mathrm{sgn}\,Y(t+k)\cdot Y(t+h+k)]\\
&-\alpha\cdot H(h,\delta)\cdot E[Y(t)\cdot \mathrm{sgn}\,Y(t+h)\cdot Y(t+k)\cdot \mathrm{sgn}\,Y(t+h+k)]\\
&+\alpha\beta\cdot E[\mathrm{sgn}\,Y(t)\cdot Y(t+h)\cdot Y(t+k)\cdot \mathrm{sgn}\,Y(t+h+k)]\\
&+\beta^2\cdot E[\mathrm{sgn}\,Y(t)\cdot Y(t+h)\cdot \mathrm{sgn}\,Y(t+k)\cdot Y(t+h+k)]\\
&-\beta\cdot H(h,\delta)\cdot E[\mathrm{sgn}\,Y(t)\cdot Y(t+h)\cdot Y(t+k)\cdot \mathrm{sgn}\,Y(t+k)]\\
&-\alpha\cdot H(h,\delta)\cdot E[Y(t)\cdot \mathrm{sgn}\,Y(t)\cdot Y(t+k)\cdot \mathrm{sgn}\,Y(t+h+k)]\\
&-\beta\cdot H(h,\delta)\cdot E[Y(t)\cdot \mathrm{sgn}\,Y(t)\cdot \underbrace{Y}_{\mathrm{sgn}}(t+k)\cdot Y(t+h+k)]\\
&+H(h,\delta)^2\cdot E[Y(t)\cdot \mathrm{sgn}\,Y(t)\cdot Y(t+k)\cdot \mathrm{sgn}\,Y(t+k)]\Big\}
\end{aligned}$$

を計算する。そのために，次の４つの場合に分けて行なう。

i) $k\neq 0$ 且つ $k\neq\pm h$,

ii) $k=h$,

iii) $k=-h$,

iv) $k=0$.

計算のために，$\rho(h)$ に対する仮定として

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & \rho(h) & \rho(k) & \rho(k+h) \\ \rho(h) & 1 & \rho(k-h) & \rho(k) \\ \rho(k) & \rho(k-h) & 1 & \rho(h) \\ \rho(k+h) & \rho(k) & \rho(h) & 1 \end{pmatrix}$$

が任意の正整数 h，及び $|k| \leqq M+h$ なる任意の整数 k について non-singular であるとする。ここで，河田[7]，p.83，補題5.1.1より，任意の定数 a, b に対して

$$\left| \int_a^b \frac{\sin t}{t} dt \right| \leqq C$$

なる絶対定数 C が存在し，$C=\pi$ とすれば十分であること，

また，
$$\mathrm{sgn}(x) = \frac{1}{\pi i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{L\to\infty} \int_{L \geqq |u| \geqq \varepsilon} \frac{1}{u} \exp[iux]\, du$$

であることに注意すれば，K. Iwase[5] と同様にして $C(k)$ が計算されるので，途中の計算式は略す。

$$\bar{K}(h) = \sum_{k=-(M+h)}^{M+h} C(k) \quad ,$$

$$J_1(a) = \int_0^a (1-x^2)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{1+x}\delta^2\right] dx + (\Phi(\delta))^2 \quad ,$$

$$J_2(a) = \int_0^a (1-x^2)^{-1/2} \left\{(1-x^2)^{-1} - \delta^2 \cdot (1+x)^{-2}\right\} \exp\left[-\frac{1}{1+x}\delta^2\right] dx + \delta\Phi(\delta)\exp\left[-\frac{1}{2}\delta^2\right] \quad ,$$

$$J_3(a) = (1-a^2)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{1+a}\delta^2\right] \quad ,$$

$$J_4(a) = \delta \int_0^a (1+x)^{-1}(1-x^2)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{1+x}\delta^2\right] dx - \Phi(\delta)\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\delta^2\right] \quad ,$$

（但し $|a| < 1$ ）としたとき，

$$\bar{K}(h)=\frac{\pi}{2}(1+H(h,\delta)^2)\cdot(1+\delta^2)-\pi\cdot H(h,\delta)\cdot(\rho(h)+\delta^2)-\pi\alpha\beta\cdot(1-\rho(2h))$$

$$+2\sum_{\substack{k=0\\k\neq h}}^{M+h}\Big\{\alpha\beta\cdot\big[(\rho(k+h)+\delta^2)\cdot J_1(\rho(k-h))-2\rho(k)\rho(h)J_2(\rho(k-h))$$

$$+(\rho(k)^2+\rho(h)^2)\cdot J_3(\rho(k-h))-2\delta(\rho(k)+\rho(h))J_4(\rho(k-h))\big]$$

$$-\alpha\cdot H(h,\delta)\cdot\big[(\rho(k)+\delta^2)\cdot J_1(\rho(k-h))-(\rho(k)+\rho(h)\rho(k-h))J_2(\rho(k-h))$$

$$+(\rho(h)+\rho(k)\rho(k-h))\cdot J_3(\rho(k-h))-\delta(1+\rho(k)+\rho(h)+\rho(k-h))\cdot J_4(\rho(k-h))\big]\Big\}$$

$$+2\sum_{k=1}^{M+h}\Big\{(\alpha^2+\beta^2)\cdot\big[(\rho(k)+\delta^2)J_1(\rho(k))-\rho(h)(\rho(k+h)+\rho(k-h))\cdot J_2(\rho(k))$$

$$+(\rho(h)^2+\rho(k+h)\rho(k-h))J_3(\rho(k))-\delta(2\rho(h)+\rho(k+h)+\rho(k-h))J_4(\rho(k))\big]$$

$$+\alpha\beta\big[(\rho(k-h)+\delta^2)J_1(\rho(k+h))-2\rho(k)\rho(h)J_2(\rho(k+h))$$

$$+(\rho(k)^2+\rho(h)^2)J_3(\rho(k+h))-2\delta(\rho(k)+\rho(h))J_4(\rho(k+h))\big]$$

$$-\alpha\cdot H(h,\delta)\big[(\rho(k)+\delta^2)J_1(\rho(k+h))-(\rho(k)+\rho(h)\rho(k+h))J_2(\rho(k+h))$$

$$+(\rho(h)+\rho(k)\rho(k+h))J_3(\rho(k+h))-\delta(1+\rho(k)+\rho(h)+\rho(k+h))J_4(\rho(k+h))\big]$$

$$-\beta\cdot H(h,\delta)\big[(\rho(k+h)+\delta^2)J_1(\rho(k))-(\rho(k)\rho(h)+\rho(k+h))J_2(\rho(k))$$

$$+(\rho(h)+\rho(k)\rho(k+h))J_3(\rho(k))-\delta(1+\rho(k)+\rho(h)+\rho(k+h))J_4(\rho(k))$$

$$+(\rho(k-h)+\delta^2)J_1(\rho(k))-(\rho(k)\rho(h)+\rho(k-h))J_2(\rho(k))$$

$$+(\rho(h)+\rho(k)\rho(k-h))J_3(\rho(k))-\delta(1+\rho(k)+\rho(h)+\rho(k-h))J_4(\rho(k))\big]$$

$$+H(h,\delta)^2\big[(\rho(k)+\delta^2)J_1(\rho(k))-2\rho(k)J_2(\rho(k))$$

$$+(1+\rho(k)^2)J_3(\rho(k))-2\delta(1+\rho(k))J_4(\rho(k))\big]\Big\}$$

となる。

定理 2

$$\sqrt{N}(\bar{r}(h,D;\alpha,\beta)-H(h,\delta))\xrightarrow[N\to\infty]{}N(0,\bar{K}(h)/(\delta\Phi(\delta)+\exp[-\tfrac{1}{2}\delta^2])^2).$$

以下簡単のために

$$\overline{V}(h, D; \alpha, \beta) = \hat{K}(h) \big/ \left(\delta\Phi(\delta) + \exp\left[-\tfrac{1}{2}\delta^2\right] \right)^2$$

と置く。また，特に $D=0$ のときは，

$$J_1(a) = \mathrm{Arcsin}\, a, \quad J_2(a) = a/\sqrt{1-a^2}, \quad J_3(a) = 1/\sqrt{1-a^2}, \quad J_4(a) = 0$$

であるから，次の結果を得る。

<u>系 1</u>

$$
\begin{aligned}
\overline{V}(h, 0; \alpha, \beta) &= \frac{\pi}{2}(1-\rho(h)^2) - \pi\alpha\beta(1-\rho(2h)) \\
&+ 2\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq h}}^{H+h} \Big\{ \alpha\beta\Big[\rho(k+h)\,\mathrm{Arcsin}\,\rho(k-h) + \frac{\rho(k)^2+\rho(h)^2-2\rho(k)\rho(h)\rho(k-h)}{\sqrt{1-\rho(k-h)^2}}\Big] \\
&\qquad - \alpha\Big[\rho(h)\rho(k)\,\mathrm{Arcsin}\,\rho(k-h) + \rho(h)^2\sqrt{1-\rho(k-h)^2}\,\Big] \Big\} \\
&+ 2\sum_{k=1}^{H+h} \Big\{ (\alpha^2+\beta^2)\Big[\rho(k)\,\mathrm{Arcsin}\,\rho(k) + \frac{\rho(h)^2+\rho(k+h)\rho(k-h)-\rho(k)\rho(h)(\rho(k+h)+\rho(k-h))}{\sqrt{1-\rho(k)^2}}\Big] \\
&\qquad + \alpha\beta\Big[\rho(k-h)\,\mathrm{Arcsin}\,\rho(k+h) + \frac{\rho(k)^2+\rho(h)^2-2\rho(k)\rho(h)\rho(k+h)}{\sqrt{1-\rho(k+h)^2}}\Big] \\
&\qquad - \alpha\Big[\rho(k)\rho(h)\,\mathrm{Arcsin}\,\rho(k+h) + \rho(h)^2\sqrt{1-\rho(k+h)^2}\,\Big] \\
&\qquad - \beta\Big[\rho(h)(\rho(k+h)+\rho(k-h))\,\mathrm{Arcsin}\,\rho(k) + 2\rho(h)^2\sqrt{1-\rho(k)^2}\,\Big] \\
&\qquad + \rho(h)^2\rho(k)\,\mathrm{Arcsin}\,\rho(k) + \rho(h)^2\sqrt{1-\rho(k)^2} \Big\}.
\end{aligned}
$$

この系 1 の特別な場合である $\overline{V}(h, 0; 1, 0)$ は M. Huzii [1]，Theorem 3 の結果である。しかし，Huzii の与えた式は数値計算を行なう上で極めて煩雑であり，ここで与えた式の方が便利である。また，$h=0$ としたとき，$\overline{V}(h, 0; \alpha, \beta) = 0$ となる

ので，形式的には系1の式は $h \geqq 0$ で与えられているとしてよい。

次に，h が十分大きい所での $\bar{V}(h,0;\alpha,\beta)$ の性質を示す。実際上は，$|\rho(h)|$ が或る程度大きい h の部分しか関心がないわけであり，従って h が十分大きい所での議論は，此の意味でナンセンスなのであるが，しかし $\bar{V}(h,0;\alpha,\beta)$ の数値計算の検算などには有効と思われるので示すことにする。

$\sqrt{N}(r(h,0)-\rho(h))$ の漸近分布の分散を $V(h)$ とする。これは既に M. Hugli[3], Theorem 6 で与えられている。系1より

$h>M$ のとき

$$V(h) = 1+2\sum_{k\geqq 1}\rho(k)^2 ,$$

$$\bar{V}(h,0;1,0)=\bar{V}(h,0;0,1)=\frac{\pi}{2}+2\sum_{k\geqq 1}\rho(k)\,\mathrm{Arcsin}\,\rho(k) .$$

$h>2M$ のとき

$$\bar{V}(h,0;1/2,1/2)=\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}+\sum_{k\geqq 1}\left(\rho(k)\,\mathrm{Arcsin}\,\rho(k)+\rho(k)^2\right) .$$

以上より，次の結果を得る。

$\forall h>2M$ について

系2. $\bar{V}(h,0;\alpha,\beta)$ は $\alpha=\beta=1/2$ のとき最小値をもつ。

系3. $\forall h>M$ について

$$\frac{\pi}{2}V(h) \geqq \bar{V}(h,0;1,0)=\bar{V}(h,0;0,1) \geqq \frac{\pi-2}{2}+V(h) .$$

系4. $\forall h > 2M$ について

$$\frac{\pi+2}{4}v(h) \geqq \bar{\bar{v}}(h,0;½,½) \geqq \frac{\pi-2}{4}+v(h).$$

系5. $\forall h > 2M$ について

$$\bar{\bar{v}}(h,0;½,½) = \frac{1}{2}\left[v(h)+\bar{\bar{v}}(h,0;1,0)\right] = \frac{1}{2}\left[v(h)+\bar{\bar{v}}(h,0;0,1)\right].$$

ここでの系2は，等しいウェイトを付けて対称化した方がよさそうであると云う我々の感じを裏付ける一つの結果である。系3は Huzii [3] の Theorem 8 に相当するものであるが，その結果は，ここでの記号で表わせば

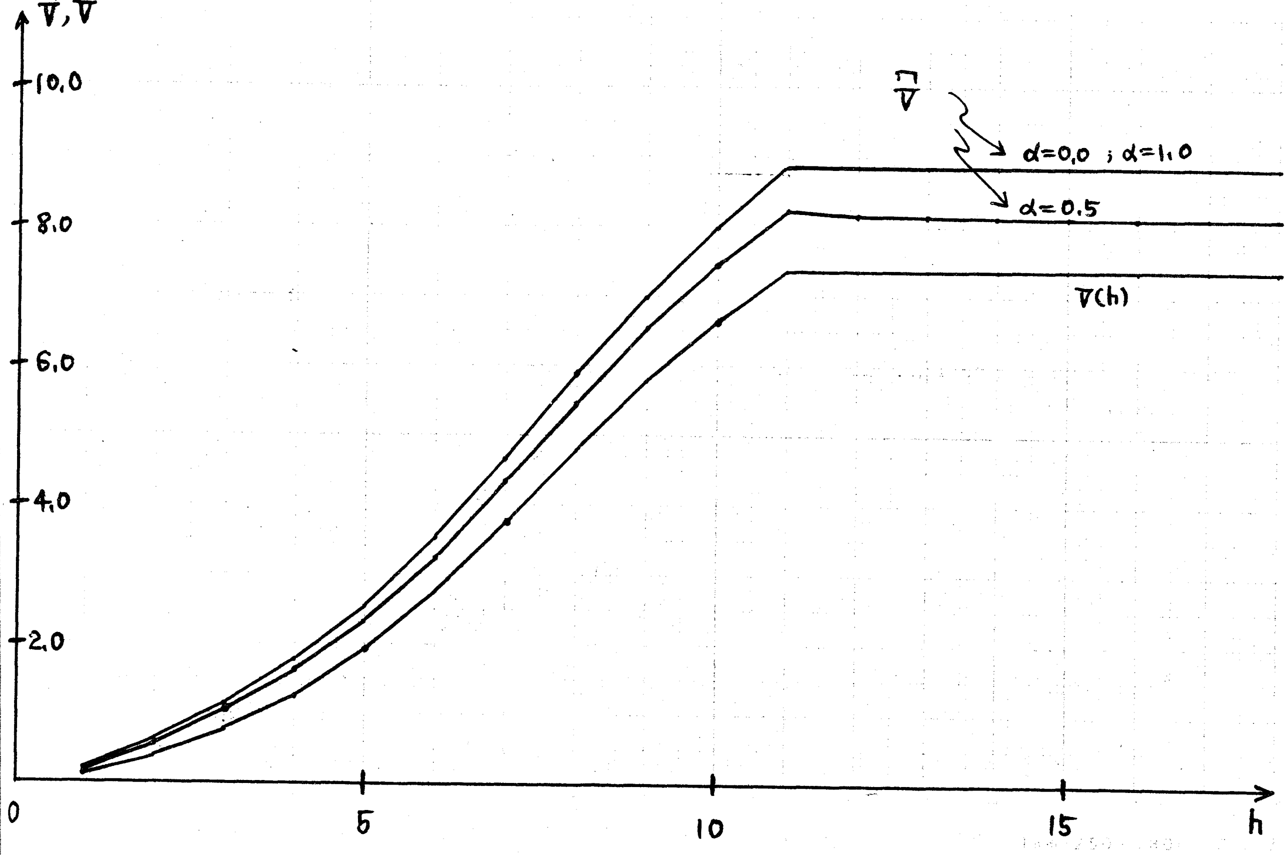
$$\frac{\pi}{2}v(h) \geqq \bar{\bar{v}}(h,0;1,0) > v(h)$$

であり，系3によってこれが改善されている。

数値計算例.

$$\rho(h) = \begin{cases} 1-\dfrac{|h|}{M+1} & ; \quad h=0,\pm1,\cdots,\pm M \\ 0 & ; \quad h=\pm(M+1),\cdots\cdots \end{cases}$$

とした場合での $M=10$ の例。他のいくつかの例でも同様なのであるが，どの h を見ても $\alpha=0.5$ のとき $\bar{\bar{v}}$ の最小値を与えている。また $\alpha=0.5$ に関して対称である。



V̄, V
10.0
8.0
6.0
4.0
2.0
0
5
10
15
h
V̄
α=0.0 ; α=1.0
α=0.5
V(h)

参考文献

[1] Huzii, M. (1962); On a simplified method of the estimation of the correlogram for a stationary Gaussian process, Ann. Inst. Stat. Math., 14, 259–268.

[2] Huzii, M. (1964); On a simplified method of the estimation of the correlogram for a stationary Gaussian process, II, Kōdai Math. Sem. Rep., 16, 199–212.

[3] Huzii, M. (1966); On a simplified method of the estimation of the correlogram for a stationary Gaussian process, III, Kōdai Math. Sem. Rep., 18, 195–211.

[4] IWASE, K. (1973); On the formula of the variance of a simplified estimator of the covariogramme for a stationary normal process, Rep. Stat. Appl. Res., 20, 113–117.

[5] IWASE, K. (1976); On a property of a simplified estimator of correlogram, Rep. Stat. Appl. Res., 23, 177–185.

[6] Cramér, H.; Mathematical Method of Statistics, Overseas, 1966.

[7] 河田龍夫; FOURIER解析, 産業図書, 1975.

[8] 寺沢寛一; 数学概論, 岩波書店, 1970.

[9] ГРАДШТЕЙН, И.С. и РЫЖИК, И.М.; ТАБЛИЦЫ ИНТЕГРАЛОВ, СУММ, РЯДОВ И ПРОИЗВЕДЕНИЙ, НАУКА, 1971.